# Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

*Адлер. 17 октября 2010.*

*Четвертый тур. Лига стратегий*

**1.** Для положительных чисел $x$, $y$ и $z$ докажите неравенство

$$x^3(y^2+z^2)^2+y^3(z^2+x^2)^2+z^3(x^2+y^2)^2 \geqslant xyz(xy(x+y)^2+yz(y+z)^2+zx(z+x)^2).$$

**2.** Дан треугольник $ABC$. Через вершины $A$ и $C$ проводятся всевозможные окружности $S$, которые пересекают стороны $AB$ и $BC$ треугольника в точках $K$ и $L$ соответственно. Докажите, что все прямые, соединяющие центр окружности $S$ и точку пересечения прямых $CK$ и $AL$, проходят через одну и ту же точку, не зависящую от $S$.

**3.** В остроугольном треугольнике $ABC$ отрезок $AM$ — медиана, а отрезок $BD$ — высота. Оказалось, что отрезок $MD$ — биссектриса треугольника $AMC$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $ABC$ равноудален от биссектрис углов $ABC$ и $BAM$.

**4.** Дана последовательность функций $\{f_n(x)\}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, определенная следующими условиями: $f_1(x)=1$, $f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{x}{f_n(x)}$. Докажите, что функция $f_{2010}(x)$ строго возрастающая.

**5.** В каждой клетке клетчатой плоскости провели диагональ. Докажите, что найдется узел, от которого можно по проведенным диагоналям дойти не менее, чем до 1000 других узлов.

**6.** Двое по очереди красят ребра некоторого связного графа $G$: первый — в красный цвет, второй — в синий (перекрашивать нельзя). Второй выигрывает, если синий граф окажется связным. Докажите, что у него есть выигрышная стратегия в том и только в том случае, когда граф содержит два связных реберно непересекающихся подграфа, у каждого из которых вершин столько же, сколько и у графа $G$.

**7.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел $n$, обладающих следующим свойством: сумма всех делителей $n$ больше $2n$, причем число $2n$ нельзя представить в виде суммы нескольких делителей $n$.

**8.** Дано множество $M=\{1,2,\ldots,15\}$. Какое наименьшее количество семиэлементных подмножеств в $M$ можно выбрать так, что:
(i) любые четыре элемента $M$ содержатся не более чем в одном множестве;
(ii) для любых трех элементов $M$ найдется выбранное подмножество, их содержащее?

**9.** Докажите, что для любого многочлена $Q$ с вещественными коэффициентами существует такой многочлен $P(x,y,z)$, что $Q(t)\equiv P(t^n,t^{n+1},t^{n+2}+t)$.

**10.** Пусть $k$ — фиксированное натуральное число. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что $f(n-1)f(n)=(n+k-f(n))^2$ для любого $n>1$.